Formule sommatoire de Poisson

Leçons concernées : 246 250

Théorème 1. *Soit $F : L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{F}(n) = \int_{\mathbb{R}} F(t)e^{-int}\,dt$. On suppose :*

$$\exists M > 0,\, \exists \alpha > 1,\, \forall x \in \mathbb{R},\, |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha} \quad \textit{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(n)| < +\infty$$

Alors on a la relation :

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)$$

Démonstration.

On considère la fonction :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+2n\pi)$$

Étape 1 : Montrons que cette fonction est 2π-périodique.

Cette série est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$. En effet, soient $A > 0$ et $|x| \leqslant A$. Alors :

$$|n| \geqslant \frac{A}{\pi} \Rightarrow |x+2n\pi| \geqslant 2|n|\pi - |x| \geqslant 2|n|\pi - A \geqslant \frac{|n|}{2} \Rightarrow |F(x+2n\pi)| \leqslant M\left(1+|n|\pi\right)^{-\alpha}$$

Or $M\left(1+|n|\pi\right)^{-\alpha}$ est le terme général d'une série convergente, donc $|F(x+2n\pi)|$ l'est également. Comme F est continue par hypothèse, f l'est aussi. De plus, le changement d'indice $n+1 = p$ donne :

$$f(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+2n\pi+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+2(n+1)\pi) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} F(x+2p\pi) = f(x)$$

Ainsi f est 2π-périodique.

Étape 2 : Calculons sa série de Fourier.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+2n\pi)e^{-imt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} F(t+2n\pi)e^{-imt}\,dt$$

L'interversion de la somme et de l'intégrale est justifiée par la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+2n\pi)$ sur $[0, 2\pi]$ et que $|e^{-imt}| \leqslant 1$. On a ensuite :

$$c_m(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t+2n\pi)e^{-im(t+2n\pi)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1} F(u)e^{-imu}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-imu}\,du = \frac{\widehat{F}(m)}{2\pi}$$

On a alors, par hypothèse :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(f)| = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(m)| < +\infty$$

Ainsi, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} F(x+n) = 2\pi f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2\pi c_m(f)e^{2i\pi mx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(m)e^{2i\pi mx}$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient alors le résultat.

□

Application 2. *Pour tout $s > 0$, on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi k^2}{s}}$$

Démonstration.

Soit $a > 0$. On considère les fonctions suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-ax^2} \end{array} \right. \quad ; \quad G : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+\star} \\ u & \longmapsto & e^{-\frac{u^2}{2}} \end{array} \right. \quad ; \quad \theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+\star} \\ s & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} \end{array} \right.$$

Cela revient alors à montrer que $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\theta\left(\frac{1}{s}\right)$. On admet que $\widehat{G} = \sqrt{2\pi}G$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\sqrt{2a}}}\, du = \frac{1}{\sqrt{2a}}\widehat{G}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} G\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

En appliquant la formule sommatoire de Poisson à f, on obtient :

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2 n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{4a}}$$

Pour tout $s > 0$, on pose $a = \frac{s}{4\pi}$. On a alors :

$$\theta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{4a}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2}{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}\theta\left(\frac{1}{s}\right)$$

□

Références

[QZ13] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013